



TITLE:

一様等方乱流における圧縮性による渦伸長低減サイクル構造 (乱流による輸送, 拡散, 混合の数理)

AUTHOR(S):

三浦, 英昭

---

CITATION:

三浦, 英昭. 一様等方乱流における圧縮性による渦伸長低減サイクル構造 (乱流による輸送, 拡散, 混合の数理). 数理解析研究所講究録 2003, 1339: 185-192

ISSUE DATE:

2003-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/43439>

RIGHT:

# 一様等方乱流における圧縮性による渦伸長低減サイクル構造

三浦英昭（核融合科学研究所）

圧縮性一様等方減衰性乱流における渦の成長を、数値シミュレーションで調べた。圧縮性の影響が渦構造の発達を阻害すること、その主因が渦伸長の低減に求められることを明らかにした。また、渦の成長過程を追跡することにより、圧縮性流体固有の渦波が発生することを発見した。この渦波は渦の直径程度の波長をもち、音波の発生と強く結び付いていることがわかった。

## 1 はじめに

圧縮性乱流に関わる研究の大きな課題の一つに、圧縮性による乱流運動の低下の原因の解明が挙げられる。たとえば、一様剪段乱流の乱流運動エネルギーの成長率や混合流の混合層幅は、圧縮性が強くなるに従って減少することがよく知られている。[1] この問題には多くの研究がなされてきた。たとえば Sarkar[2] は、一様剪段乱流の運動エネルギーの低下に関して、運動エネルギー収支式中の圧縮性特有の項 (圧力・速度発散相関項、圧縮性散逸項) よりむしろ、レイノルズ剪段応力の非圧縮性成分の変化が本質であることを明らかにした。また、Vreman et al.[3] は、混合層乱流における混合層幅の発達について、圧力揺らぎの低下が重要であるとされている。しかし、これらの研究は統計的な性質を調べたものであり、具体的にどの構造が圧縮性によってどのように変化したかを明らかにした例はあまり見られない。本研究の目的は、このような圧縮性による乱流の変化を、渦構造への具体的な圧縮性の影響を通じて調べることにある。

圧縮性及び非圧縮性一様等方減衰性乱流の直接数値計算を実行し、その渦構造を直接比較することで、圧縮性の存在がどのような影響を渦に与えるかを調べる。格子点数  $N^3$ 、パラメータ等を表1に示す。C1, C2, C3 は圧縮性、I1 は非圧縮性のシミュレーションを示す。レイノルズ数  $Re_0 = 1000$ 、プラントル数  $Pr_0 = 0.7$ 、比熱比  $\gamma = 1.4$  はこの報告では固定されている。マッハ数  $M_0$  を変えることで、圧縮性の強さをコントロールする。

## 2 圧縮性による旋回渦運動および渦伸長の低下

C1-C3, I1 における運動エネルギー、エンストロフィーの時間発展を見る限り、顕著な圧縮性の影響は見られない。[4] しかし、図1に示す通り、エンストロフィー密度の二乗平均揺らぎ

には圧縮性の影響が見られる。圧力揺らぎの時間発展にも同様に、圧縮性による揺らぎの減少傾向が見られる。エンストロフィー密度、圧力揺らぎの両者ともに渦構造の可視化に使われる量であり、渦構造が圧縮性の影響を受けていることを示唆している。

図2には、C1のデータから可視化した渦構造(渦軸および渦芯)を示した。これらの渦軸、渦芯はMiura and Kida[5], Kida and Miura[6]に示した手法で同定、可視化を行なった。以下ではこれらの渦軸、渦芯データを用いて渦の旋回運動の強さを定量化する。

図3(a)は、渦軸方向渦度成分 $\omega_{||}$ の全渦軸上での二乗平均値 $\langle \omega_{||}^2 \rangle$ の時間発展である。また図3(b)は、渦芯外周を閉曲線とする循環を粘性(ここでは無次元化されているので $Re_0$ )で規格化して得られる渦度 $\langle \omega_{\Gamma}^2 \rangle = \langle (\Gamma/S)^2 \rangle$ の時間発展である。記号 $\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$ 、 $S$ はそれぞれ渦芯の外周によって定義した閉曲線およびその面積である。この二つの量 $\langle \omega_{||}^2 \rangle$ および $\langle \omega_{\Gamma}^2 \rangle = \langle (\Gamma/S)^2 \rangle$ は渦の旋回運動の強さを特徴付ける。図3(a),(b)からわかる通り、どちらの量も圧縮性が強くなる(マッハ数 $M_0$ が大きくなる)に従って小さくなる。このことから、圧縮性が渦の旋回運動の発達を抑制しているものと判断される。

このような変化の原因を調べるには、渦構造の周辺でのエンストロフィー収支を調べるのが有効である。渦構造の周りでの平均 $\langle \cdot \rangle_R$ を、渦の旋回面上での径度方向への積分および渦軸方向への積分によって定義する。この平均操作で得られる平均量は渦中心軸からの半径の関数となる。エンストロフィー収支方程式にこの平均操作を加えることにより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2 \right\rangle_R &= - \left\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2 \right\rangle_R + \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle_R + \left\langle \frac{1}{Re_0 \rho} \nabla^2 \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2 \right\rangle_R \\ &\quad - \left\langle |\boldsymbol{\omega}|^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\rangle_R + \left\langle \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{\omega} \right\rangle_R \\ &\quad - \left\langle \frac{1}{Re_0} \frac{\nabla \rho \times \left\{ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\}}{\rho^2} \cdot \boldsymbol{\omega} \right\rangle_R \end{aligned} \quad (1)$$

を得る。この右辺各項(非圧縮性ラン II については右辺第3項まで)を時刻 $t=2$ で評価したものが図4である。この図から、渦伸長項 $\langle \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle_R$ が渦軸周りでの渦度生成を担っていることがわかる。また、より早い時刻からの観察により、圧縮性の影響はこの項に最も早く現れ、その影響の大きさも最も顕著である。この影響は、式(1)を $\langle |\boldsymbol{\omega}|^2 \rangle$ で規格化し、渦度の圧縮性による成長低下を考慮にいれてもなお顕著である。このことから、渦度の成長低下の主因は渦伸長の低下であると考えられる。

図5には、渦軸上での渦伸長 $\sigma = \partial u_{||} / \partial x_{||}$ の二乗平均値 $\langle \sigma^2 \rangle_A$ の時間発展を示した。ここで、 $\langle \cdot \rangle_A$ は、全渦軸上での平均を表す。 $\langle \sigma^2 \rangle_A$ の値も、上に示した他の諸量と同様に、圧縮性の影響を受けている。圧縮性による $\langle \sigma^2 \rangle_A$ の低下は非常に大きくはないが、渦度の成長に累積的に影響を及ぼすため、時間が経過する程に影響が大きくなると考えられる。

渦度の成長低下の全てを渦伸長の低下に帰着させるかどうかを判断する前に、密度の効果を考慮しなければならない。圧縮性のエンストロフィー収支式の評価(図4)において、密度勾配項および速度発散を陽に含む項は小さい。これらの項を無視すると、エンストロフィー収支式は近似的に以下のように記述できる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} \left| \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right|^2 \right\rangle_R = - \left\langle \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{1}{2} \left| \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right|^2 \right\rangle_R + \left\langle \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \mathbf{S} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right\rangle_R + \left\langle \frac{1}{Re_0} \nabla^2 \left| \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right|^2 \right\rangle_R \quad (2)$$

非圧縮性流体で密度一定 ( $\rho \equiv 1$ ) であることを考慮すると、この表式において非圧縮性流体と圧縮性流体のエンストロフィー収支式は一致する。上の議論から渦伸長項が重要であることがわかっていて、上の式の一致、特に非圧縮性流体の渦伸長  $\langle \omega \cdot S \cdot \omega \rangle_R$  と圧縮性伸長  $\langle \frac{\omega}{\rho} \cdot S \cdot \frac{\omega}{\rho} \rangle_R$  の一致は重要である。この一致は、圧縮性および非圧縮性渦の両者に同じ強さの伸長を加えた場合、圧縮性渦では渦伸長の一部が密度の低下をもたら事に費され、非圧縮性流体で得られる程の伸長効果が圧縮性流体では得られないということを意味している。図6には、ポテンシャル渦度の渦軸方向成分の2乗平均値  $\langle (\omega_{\parallel}/\rho)^2 \rangle_A$  の時間発展を示した。時間の発展初期段階 ( $t < 1$ ) において、圧縮性および非圧縮性のグラフは非常によく一致している。これは、式(2)における圧縮性および非圧縮性のエンストロフィー収支式の一致を反映したものである。したがって、この初期段階における圧縮性渦の成長抑制は、密度の低下に帰せられる。しかし、 $t > 1$  においては、C1-C3 および I1 のグラフの一致は失われる。他方、図5に見る通り、各ランにおける渦伸長の強さの違いは次第に顕著になっている。以上より、渦発達初期段階については密度の影響が重要であるが、これ以降は密度の成長では説明できず、主な原因は渦伸長の低下に帰せられる。

この渦伸長の低下をもたらし原因は特定できていないが、その一因として以下のようなメカニズムが考えられる。時間発展の初期において、密度の低下が渦度の成長を抑制することを既に示した。一般に管状渦は、その強度が増すことで背景の剪段を強化する役割を担う。初期の渦構造発達阻害はこの背景剪段の成長阻害をもたらし。他方、渦構造の発達を促すのもまた剪段(ここでは渦伸長)であるため、初期における渦構造の発達阻害は、剪段の成長阻害を経由して、再び渦構造自体の発達の阻害をもたらしことになる。このように、初期の渦構造成長の阻害が、剪段(渦伸長)の発達阻害と、これを経由した渦構造自身の発達阻害という二つの副次的な効果をもつ、一種の悪循環をもたらしことになる。

このような循環的な機構が効果的に働くためには、渦同士が近接していなければならない。図7(a)に、近接する複数の渦の例を示す。3本の渦軸が、大きな渦の渦芯に食い込む形で接近している。(図7(b)は、これに対応する非圧縮性ランIの渦である。) 渦軸間の距離を評価したところ、全渦軸延長に対して5-20%(時刻によって変動する)は、他の渦軸から半径  $5\eta$  以内の至近距離にあり、その渦軸のつくり出す剪段の影響に直接さらされていることがわかった。このことから、上の循環的な機構は、渦伸長および渦発達の成長の阻害に小さくない役割を果たしていると考えられる。

### 3 個別渦の時間発展と圧縮性渦波の励起

渦伸長の低下の様子を調べるためには、個々の渦の時間発展を追跡し、その渦軸上での渦伸長の変化を観察するのが有効である。初期時刻にいくつかの渦を選び、それぞれの渦が環境の違い(C1,C2,C3,I1)に従ってどのように成長するかを比較する。図7(a)および(b)には、同じ祖先から派生したC1およびI1の渦芯の例を示した。この図から、圧縮性渦は非圧縮性渦の渦芯に比べて細く、またその外形は渦軸方向に沿って振動的であることが見てとれる。

C1-C3 および I1 の渦軸上の渦伸長を比較したのが図8である。横軸は渦軸の一端から他の端点へ軸に沿って測った距離である。ランI上の渦伸長がゆるやかに大振幅で振動しているのに対し、C1-C3の渦伸長は短い波長の振動を繰り返している。ランI1の渦伸長を包絡線としてC3,C2,C1の順に長波長振動の振幅が減少し、逆に短波長振動は強くなっている。

この様子は、渦伸長の空間スペクトルを解析することでより定量的に調べることができる。図9には、時刻 $t = 2$ における渦軸上の渦伸長の平均空間スペクトルを示した。このスペクトルには、渦伸長データの揺らぎ部分にハニング窓によるフィルター操作を加えてあるが、以下に述べる性質はフィルターの種類に依らない。図9の低波数部分は、圧縮性が強くなるにつれて強度が低下している。これは、圧縮性によって渦伸長が低下するというこれまでの観測と対応している。他方、圧縮性のランでは、高波数部分が励起されている。このように、圧縮性の渦軸上には、非圧縮性渦には見られない波が励起されている。なお、これらの波は渦軸上の渦度にも同様に観測されており、その性質も同様であるので、今後は短に渦波と呼称する。

上で述べた渦波の振動周期の性質をより詳しく調べるため、図10には渦軸上の振動周期 $\Lambda$ の確率密度関数(PDF)を示した。C1-C3のグラフは互いに重なり合っており、振動の周期分布は圧縮性によらないことを示している。さらに、この3つのPDFは $\Lambda/\eta \simeq 15$ 、すなわち渦の平均直径程度のスケールに鋭いピークをもっている。これは、渦直径に対応した特別なスケールが渦伸長上の波に存在することを示している。他方、非圧縮性の場合には、振動周期は $\Lambda/\eta \simeq 5$ 付近に広いピークをもち、その裾野は $(\Lambda/\eta)^{-5/3}$ に比例している。このスケール則の存在は、非圧縮性の渦波には特別な周期が存在しないことをしめしている。このように、渦波の性質について圧縮性乱流と非圧縮性乱流は明確に一線を画している。圧縮性乱流からマッハ数ゼロの極限での非圧縮性乱流への収束は、振動の振幅(図9)の収束(短波長の振幅が小さくなり、長波長の振幅が回復する)をもって行われる。

この圧縮性固有の短波長渦波の発生原因を考えるに当たっては、音波の存在がもっとも有力である。音波の発生は、ライトヒル方程式

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [\gamma M_0^2 (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} + \tau_{ij}) - \rho \delta_{ij}], \quad (3)$$

によって記述される。式(3)右辺の項が音波生成項である。図11(a)に、ランC1における音波生成項の等値面を渦軸とともに示す。渦中心軸の周囲に音波の生成源が局在化していることがわかる。図11(b)は、この音波生成項を渦軸の周りについて平均したもの、すなわち

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [\gamma M_0^2 (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} + \tau_{ij}) - \rho \delta_{ij}] \right\rangle_R \quad (4)$$

である。圧縮性が強くなるにつれて、音波の発信も強くなることがわかる。このように、渦の中心軸からは音波が発信されている。

音波が渦軸から絶え間無く発信されているという上の解析結果は、圧縮性の渦波が音波による寄与として発生することを示唆している。しかし、先に述べたように、C1-C3のランの圧縮性はあまり強くなく、従って発信される音波のエネルギーはさほど強いものではない。また、渦伸長 $\sigma$ の代わりに速度場非圧縮性成分による渦伸長 $\sigma^I = \partial u_{||}^I / \partial x_{||}$ を調べると、この両者の挙動、振幅ともかなり一致しており、渦伸長における波動は非圧縮性的な渦伸長と音波の重ね合わせによるものではなく、渦伸長の非圧縮性成分自体に発生するものである。このことから、圧縮性渦波の発生は、音波によって引き起こされるが、その語は音波と渦波がお互いに励起し合いながら成長したものと考えられる。事実、渦軸上の波の伝播速度を調べると、その一部は音波の分散関係を満たすが、あるものは非圧縮性渦の渦波の分散関係[7]を満たすことが

## 4 まとめ

圧縮性の乱流への影響を、減衰性一様等方圧縮性乱流における渦の回転運動の抑制機構に焦点をあてて調べた。この結果、この抑制には、渦伸長の低下が大きく関わっていることが明らかになった。また、圧縮性乱流中の渦軸上には、非圧縮性渦には現れない特有の波長をもつ渦波が圧縮性渦に発生することがわかった。この渦波は音波の発生と強く結び付いている。圧縮性流体中の渦は音波との重ね合わせで不安定化し得ることが知られていることから、このような渦波の存在は、外部入射音波による渦の崩壊など、乱流渦のコントロールの可能性を示唆するものである。

## 参考文献

- [1] S. K. Lele, "Compressibility effects on turbulence", *Ann. Rev. Fluid Mech.* **26**, 211 (1994)
- [2] S. Sarkar, *J. Fluid Mech.*, **282** (1995) 136.
- [3] A. W. Vreman, N. D. Sandham and K. H. Luo, *J. Fluid Mech.*, **320** (1996) 235.
- [4] H. Miura, *Comp. Phys. Comm.* **147** (2002) 450.
- [5] H. Miura and S. Kida, *J. Phys. Soc. Japan* **66** (1997) 1331-1334.
- [6] S. Kida and H. Miura, *J. Phys. Soc. Japan* **67** (1998) 2166-2169.
- [7] S. Chandrasekhar, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford Univ. Press.

	$N^3$	$Re_0$	$M_0^2$	$Pr_0$	$\gamma$	$k_{max}\eta$
C1	$512^3$	1000	2.0	0.70	1.4	2.0
C2	$512^3$	1000	0.5	0.70	1.4	2.0
C3	$512^3$	1000	0.1	0.70	1.4	2.0
I1	$256^3$	1000	-	-	-	2.0

表 1: DNS のコントロールパラメータ。記号  $k_{max}$  および  $\eta$  はそれぞれ最大波数及びコルモゴロフ長を示す。

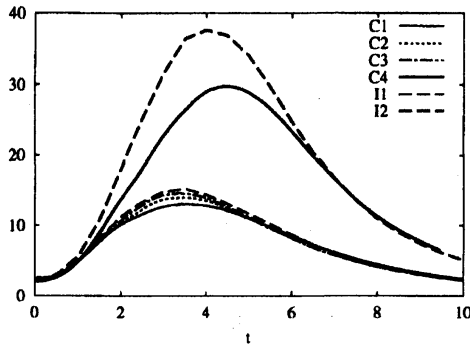


図 1: エンストロフィーの二乗平均揺らぎの時間発展。



図 2: 渦軸および渦芯の例。

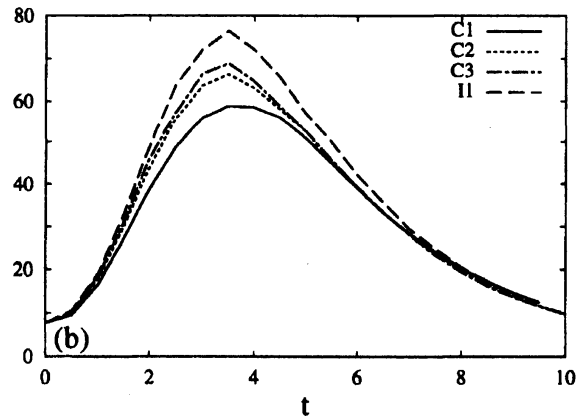
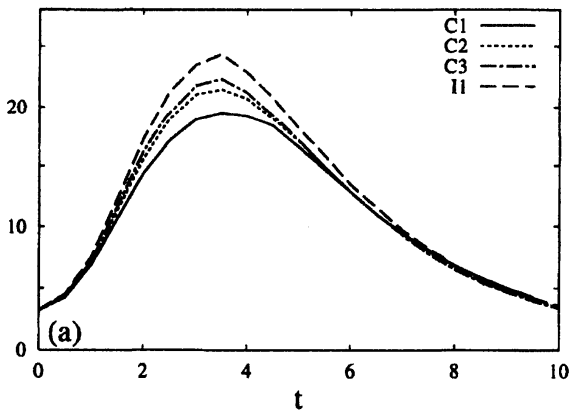


図 3: (a) 渦軸方向渦度成分  $\langle \omega_{\parallel}^2 \rangle$  および (b) 渦芯外周を閉曲線とする循環で定義された渦度  $\langle \omega_{\Gamma}^2 \rangle$  の時間発展。

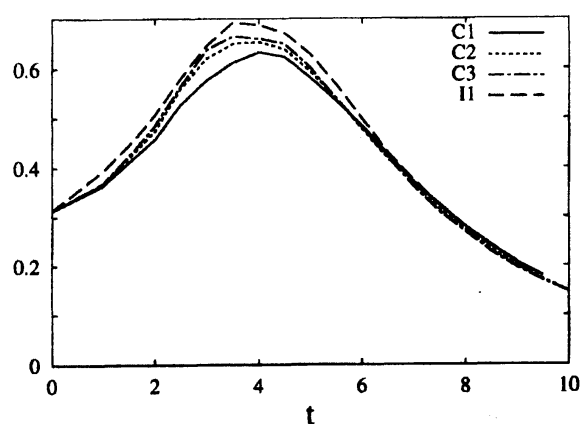
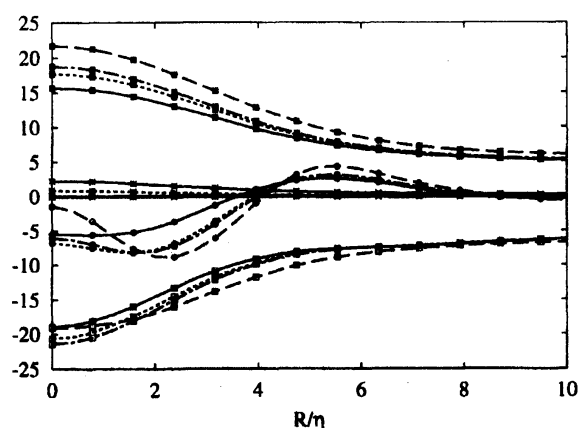


図 4: 渦軸周囲でのエンストロフィー収支。式 図 5: 渦軸上の渦伸長  $\sigma$  の二乗平均値の時間  
(1) 右辺第一項から順に○、■、□、\*、×、+ 発展。  
の記号で表されている。線種は DNS の種類を  
表し、これについては他の図と同じである。

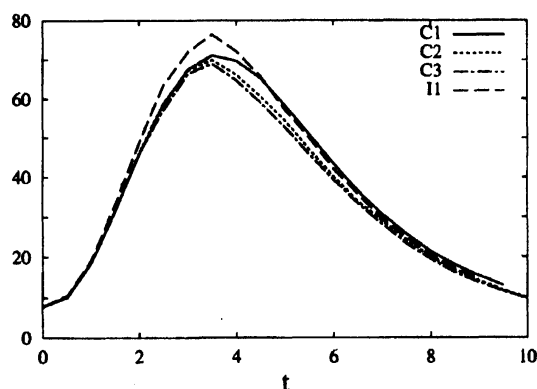


図 6: ポテンシャル渦度の渦軸方向成分の  
2 乗平均値の時間発展。

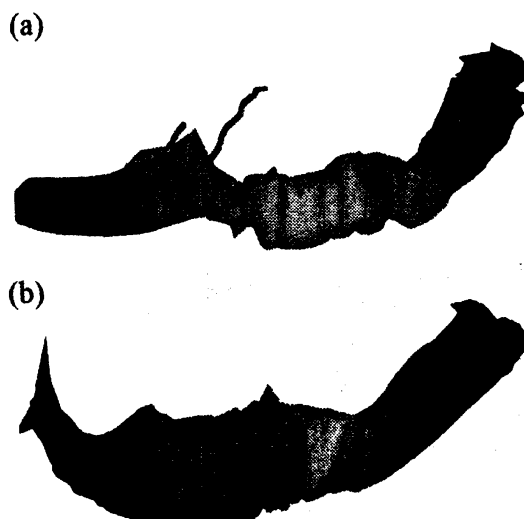


図 7: (a) 圧縮性ラン C1 における渦同士の  
近接例。渦芯に 3 本の渦軸が食い込む形で  
近接している。(b)(a) の渦と同じ祖先から  
時間発展を始めた非圧縮性渦芯。



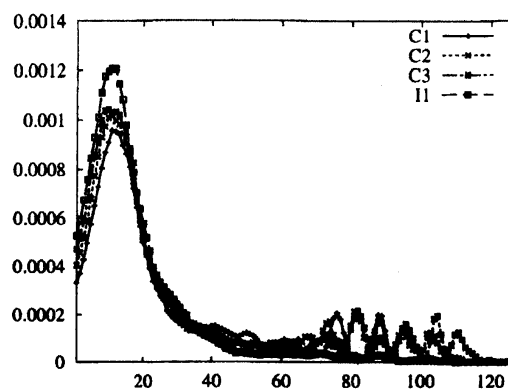
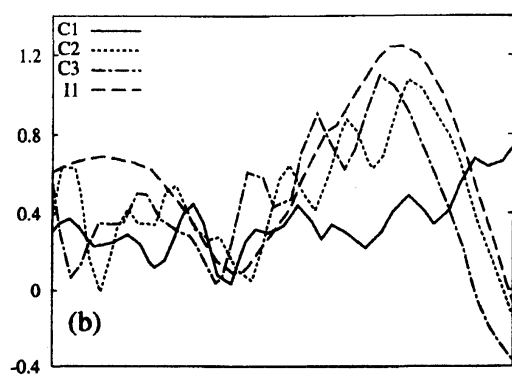


図 8: ラン C1-C3 および I の渦軸上の渦伸 図 9: ラン C1-C3 および I の渦軸上の渦伸  
長の比較。 長のハニングスペクトルの平均 ( $t = 2$ )。

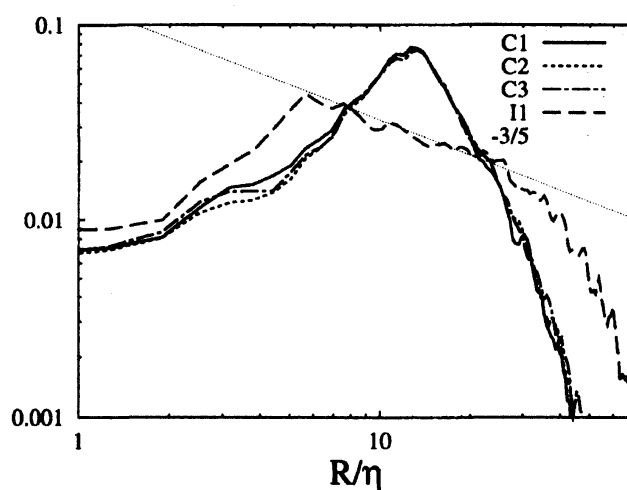


図 10: 渦軸上の振動の周期の PDF。

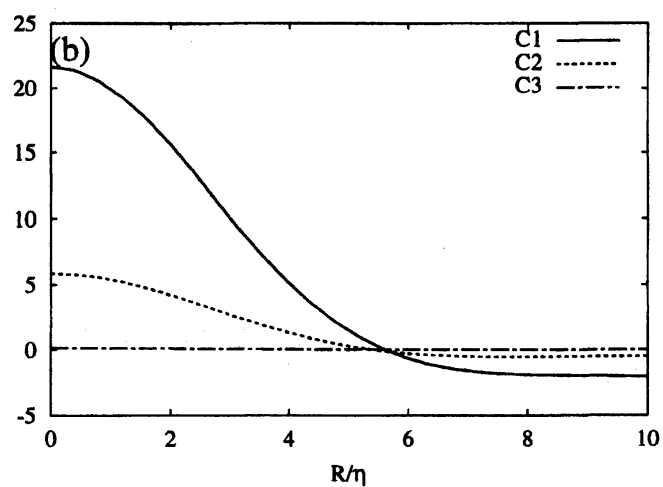


図 11: